

Đề : Chứng minh rằng trong 9 số tự nhiên bất kỳ luôn tồn tại 5 số có tổng chia hết cho 5.

Lời giải:

Gọi 9 số tự nhiên cần tìm là x_1, x_2, \dots, x_9 .

Gọi số dư của 9 số trên khi chia cho 5 lần lượt là $a_1; a_2; \dots; a_9$.

Vì một số khi chia cho 5 thì số dư chỉ có thể là 0; 1; 2; 3; 4 nên $a_i \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Giờ ta quan tâm tới bộ số a_i .

TH1: Nếu trong 9 số tồn tại 5 số khác nhau.

Chọn 5 số đó. Tổng của chúng là: $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ chia hết 5.

TH2: Nếu trong 9 số chỉ tồn tại nhiều nhất 4 số khác nhau.

Giả sử 4 số đó là $\{a_1; a_2; a_3; a_4\} = \{0; 1; 2; 3\}$.

Như vậy thì trong 5 số còn lại phải có ít nhất hai số giống nhau, ta giả sử là $a_5 = a_6$. Hơn nữa $a_5 = a_6 \neq 4$. Vì nếu bằng 4 thì tồn tại 5 số khác nhau.

Nếu $a_5 = 0$ thì $a_5 + a_6 + a_1 + a_3 + a_4 = 0 + 0 + 0 + 2 + 3 = 5$ chia hết 5.

Nếu $a_5 = 1$ thì $a_5 + a_6 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 0 + 1 + 2 = 5$ chia hết 5.

Nếu $a_5 = 2$ thì $a_5 + a_6 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 2 + 1 + 2 + 3 = 10$ chia hết 5.

Nếu $a_5 = 3$ thì $a_5 + a_5 + a_1 + a_2 + a_4 = 3 + 3 + 0 + 1 + 3 = 10$ chia hết cho 5.

Vậy ta luôn chọn được 5 số có tổng chia hết cho 5.

Các trường hợp khác tương tự.

TH3: Nếu trong 9 số chỉ tồn tại nhiều nhất 3 số khác nhau.

+ Nếu tồn tại 5 số bằng nhau thì tổng của chúng chia hết cho 5.

+ Nếu có nhiều nhất 4 số bằng nhau. Giả sử là $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Khi đó 5 số còn lại chỉ có thể thuộc các trường hợp:

$$\begin{cases} a_5 = a_6 = a_7 \\ a_8 = a_9 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a_5 = a_6 = a_7 = a_8 \\ a_9 \end{cases}$$

Xét trường hợp 3 số khác nhau là $\{0; 1; 2\}$. Như vậy ta có 3 nhóm số tương ứng.

$$\text{Giả sử } \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_5 = 1 \\ a_8 = 2 \end{cases} \text{ thì ta chọn } a_1 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 0 + 1 + 1 + 1 + 2 = 5 \text{ chia hết 5.}$$

$$\text{Giả sử } \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_5 = 1 \\ a_9 = 2 \end{cases} \text{ thì ta chọn } a_1 + a_5 + a_6 + a_7 + a_9 = 0 + 1 + 1 + 1 + 2 = 5 \text{ chia hết 5.}$$

Các trường hợp khác hoàn toàn tương tự. Ta luôn chọn được 5 số có tổng chia hết cho 5.

TH4: Nếu trong 9 số tồn tại nhiều nhất hai số khác nhau.

Theo nguyên lý Di-rích-lê thì chắc chắn tồn tại 5 số giống nhau. Chọn 5 số đó.

Như vậy trong tất cả các trường hợp, ta luôn chọn được 5 số có tổng các số dư chia hết cho 5.

Nói cách khác trong 9 số tự nhiên bất kỳ luôn tồn tại 5 số có tổng chia hết cho 5 (đpcm).