Trình bày lại lời giải của bạn Minh:

Gọi 9 số đã cho là $a_1; a_2; ... ; a_9$.

Xét tính chia hết cho 5 nên ta coi như $a_i \in \{0; 1; 2; 3; 4\}; i = \overline{1; 9}$.

Giả sử $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_9$.

Nếu như tồn tại chỉ số i để $a_i = a_{i+4}$ thì do $a_i \leq a_{i+1} \leq \cdots \leq a_{i+4}$ nên $a_i = a_{i+1} = \cdots = a_{i+4}$.

Khi đó trong 9 số ta chỉ cần chọn 5 số $a_i; a_{i+1}; ... a_{i+4}$ thì tổng 5 số đó chia hết cho 5.

Xét TH $a_i < a_{i+4} \forall i = \overline{1; 5}$.

Đặt $A_i = \{a_i; a_{i+4}\}; i = \overline{1; 4}$ và $A_5 = \{a_9\}$.

Ta định nghĩa hai phép toán sau:

X + Y = {(x + y) mod 5 $x \in X; y \in Y$}

X + a = {(x + a) mod 5 $x \in X$}

Đặt $S_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_i (i \leq 5)$

Gọi $m(X)$ là số phần tử của X. Khi đó $m(S_i) \leq 5$.

Ta có: $m(S_5) = m(S_4)$ (Bởi vì tập hợp S_4 có phần tử $(a_i + a_j + a_h + a_g)$ thì tập S_5 cũng có phần tử $(a_i + a_j + a_h + a_g + a_9)$ và ngược lại).

Tương tự: $m(S_{i-1} + a_i) = m(S_{i-1}) = m(S_{i-1} + a_{i+4})$ (1)

Với i = 2; 3; 4 ta có:

$S_i = S_{i-1} + A_i = S_{i-1} + \{a_i; a_{i+4}\} = \{S_{i-1} + a_i\} \cup \{S_{i-1} + a_{i+4}\}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $m(S_{i-1}) \leq m(S_i)$. (theo tính chất hợp của 2 tập hợp, xét khi nào dầu = xảy ra ở phía dưới)

Vậy thì $2 = m(S_1) \leq m(S_2) \leq m(S_3) \leq m(S_4) = m(S_5) \leq 5$.

Nếu $m(S_4) < 5$ thì do $2 = m(S_1) \leq m(S_2) \leq m(S_3) \leq m(S_4) \leq 4$,phải tồn tại $j \in \{1; 2; 3\}$ mà $m(S_j) = m(S_{j+1})$.

Khi đó đặt $a_{j+1} = x; a_{j+5} = y$. Vậy thì $A_{j+1} = \{x; y\}$ và $x < y$.

Vì $S_{j+1} = \{S_j + x\} \cup \{S_j + y\}$ mà $m(S_j + x) = m(S_j + y) = m(S_j) = m(S_{j+1})$

Nên $S_j + x = S_j + y \Longrightarrow S_j = S_j + (y - x) \Longrightarrow S_j = S_j + (y - x) + (y - x), \ldots$

Tức là nếu lấy $z \in S_j$ thì $z + n(y - x) \in S_j (n = 0; 1; 2; 3; 4)$.

Năm số bên trên là khác nhau (vì $(y - x)$ và 5 là nguyên tố cùng nhau) nên $m(S_j) = 5$, mâu thuẫn giả sử $m(S_4) < 5$.

Vậy thì $m(S_4) = 5$, hay $m(S_5) = 5$.

Vậy thì chắc chắn trong S_5 có phần tử 0. Mà S_5 là tập hợp số dư khi chia cho 5 của tổng của 5 số trong 9 số đã cho. Nói cách khác, trong 9 số tự nhiên bất kì, luôn tồn tại 5 số có tổng chia hết cho 5.

Nhận xét: Bài toán đúng khi thay 5 bởi số nguyên tố bất kì, với lời giải tương tự. Dễ dàng chứng minh nó cũng đúng khi thay bởi hợp số bất kì, tương tự khi chứng minh "Từ 11 số chọn được 6 số có tổng chia hết cho 6"